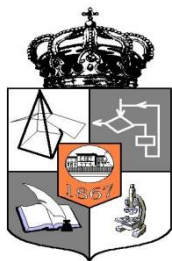




18 mai 2019



Ministerul Educației Naționale
Inspectoratul Școlar Județean Bacău
COLEGIUL NAȚIONAL „FERDINAND I”

SECȚIUNEA ION BARBU - clasa a XII-a

Barem de corectare și evaluare-matematică (45p)

SUBIECTUL I (25 p)

Fie $A(+, \cdot)$ un inel cu proprietatea că $x^6 = x$ pentru orice $x \in A$. Să se arate că :

- a) $x^2 = x$ pentru orice $x \in A$
b) A este inel comutativ.

Soluție

a) $-x = (-x)^6 = x^6 = x \quad \forall x \in A$ de unde $x + x = 0, \forall x \in A$ 5p

$(x+1)^6 = x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1 \quad (1)$ 3p

Cum $x + x = 0, \forall x \in A$ vom avea $6x^5 = (x^5 + x^5) + (x^5 + x^5) + (x^5 + x^5) = 0 + 0 + 0 = 0$

și analog $15x^4 = x^4$, $20x^3 = 0$, $15x^2 = x^2$, $6x = 0$ 2p

Folosind și ipoteza relația (1) devine $x+1 = (x+1)^6 = x^6 + x^4 + x^2 + 1 = x + x^4 + x^2 + 1$

De unde $x^4 + x^2 = 0$ 3p

$x^4 = x^4 + 0 = x^4 + x^4 + x^2 = 0 + x^2 = x^2$ 3p

$x = x^6 = x^4 \cdot x^2 = x^2 \cdot x^2 = x^4 = x^2$ 3p

b) Fie $x, y \in A$ arbitrare. Atunci $(x+y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2 \quad (2)$ 2p

Comfom punctului a) avem $(x+y)^2 = x+y$, $x^2 = x$ și $y^2 = y$

Relația (2) devine $xy + yx = 0$ 2p

și cum $x + x = 0, \forall x \in A$ obținem $xy = yx$ 2p

Prin urmare inelul este comutativ.

SUBIECTUL II (20 p)

a) Să se arate că : $\ln(1+x) \leq x, \forall x \in (-1, \infty)$

b) Fie a un număr real strict pozitiv. Să se arate că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 \frac{x^n}{a+x^n} dx = \ln \frac{a+1}{a}.$$

Soluție:

a) Se arată că funcția $g: (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x - \ln(x+1)$ are un minim egal cu 0.3p

b) $n \int_0^1 \frac{x^n}{a+x^n} dx = \int_0^1 x \cdot \frac{nx^{n-1}}{a+x^n} dx = \int_0^1 x [\ln(a+x^n)]' dx = x \ln(a+x^n) \Big|_0^1 - \int_0^1 \ln(a+x^n) dx =$



18 mai 2019

$$\ln(a+1) - \int_0^1 [\ln a + \ln\left(1 + \frac{x^n}{a}\right)] dx = \ln \frac{a+1}{a} - \int_0^1 \ln\left(1 + \frac{x^n}{a}\right) dx \dots\dots\dots 10p$$

$$\text{Folosind a) } 0 \leq \int_0^1 \ln\left(1 + \frac{x^n}{a}\right) dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{a} dx = \frac{1}{a(n+1)} \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Cum } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \ln\left(1 + \frac{x^n}{a}\right) dx = 0 \text{ obținem } \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \int_0^1 \frac{x^n}{a + x^n} dx = \ln \frac{a+1}{a} \dots\dots\dots 5p$$